溯本求源准发力，聚焦端点稳突破——2024 年高考数学新课标 I 卷 18 题分析思考

张宇琳

南京师范大学，江苏 南京 210023

摘要：本文聚焦于 2024 年高考数学新课标 I 卷第 18 题导数题进行分析，先精准理解题意，明确题目中参变量等核心要素，再深入分析条件与结论的关联，探寻解题路径，接着严谨推导解答，展现完整的思维链条，最后从一题多解视角，尝试不同方法突破问题。研究发现，该题虽较难，但其命题思路与教材例题、习题一脉相承，考察了学生对于参变量，函数图象以及导数运用等相关知识点。在题目分析后，本文进行了有关高三复习的相关思考，提出了高考复习需要回归数学基础，重视专题教学，推动自主探究。

关键词：函数与导数；波利亚解题表；题目溯源

引言

2024 年高考数学全国卷采用全新的试题结构, 减少了题量，增强了题目的思维含量，更加重视对学生数学能力和素养的考查，聚焦素养导向的学习评价[1]。作为新题型改革后的第一年，考试内容将引领之后高考考察的风向。

函数与导数试题考查形式多变，综合性强，思维 强度高，往年高考中均将此知识内容作为大题的一部分。利用导数研究函数的单调性、极值、最值以及利用函数恒成立问题时高中数学的重要内容，也是高考考查的重点之一。2024 年高考数学全国新课标I卷将导数放在 18 题次压轴的位置，将对数函数与双参数结合，多角度考查学生转化、化归、分类讨论、数形结合等数学思想方法[2]。

本文基于波利亚解题表对本题进行理解与分析，同时对题目进行了教材溯源，基于题目的分析与溯源提出了高考复习的建议与思考[3]。

1 题目呈现

题目：（2024 年新高考一卷 18 题）已知函数 $f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$.

（1）若 b =0，且$f'(x)\geq 0$，求 a 的最小值；

(2)证明：曲线 $y=f(x)$是中心对称图形；

（3）若 $f(x)>-2$，当且仅当 $1<x<2$，求 b 的取值范围

2 题目分析

2.1 第（1）小题

理解题目:本题聚焦函数与导数的主干知识进行设问，考察对数形函数与一次函数的分析。从题目中可知为含参数的不等式求解，且考察参数的最值问题。以往已学习过分离参数、分类讨论等方法解决类似问题。

拟定计划:考察复合函数的求导公式，完成对$ln\frac{x}{2-x}+ax$导数求解，很多学生复合求导时易产生各类错误。因此，为简化求导难度，在讲题时需要先对题目进行简单的剖析，可以将复杂的对数型函数利用对数的减法运算进行转化，再求导简化计算难度。完成求导工作后，利用求解函数恒成立问题的通法既可完成。

实施计划：

解法 1：复合函数直接求导：

$$f'(x)=\frac{2-x}{x}\cdot\frac{2-x+x}{(2-x)^2}+a=\frac{2}{x(2-x)}+a\geq 0，$$

$$(0<x<2)，$$

$$则a\geq\frac{2}{x(x-2)}$$

$$所以a\geq\left(\frac{2}{x(x-2)}\right)_{max}$$

$$因为\frac{2}{x^2-2x}=\frac{2}{(x-1)^2-1}$$

$$所以a\geq-2$$

解法 2：对数运算后求导

为降低求导难度，可以将对数形函数先进行对数运算再求导：

$$ln\frac{x}{2-x}=ln\,x-ln\,(2-x)，$$

$$所以\left(ln\frac{x}{2-x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{2-x}\cdot(-1)=\frac{2}{x(2-x)}。$$

再按解法 1 进行参变分离，求出a的范围。

2.2 第（2）小题

理解题目：本题需证明曲线为中心对称图形，是从整体上研究曲线的对称性，要证明函数的对称性，关键是找到对称轴和对称中心，需要综合函数的性质和对称点验证法，强调学生的探究意识、探究策略、逻辑推理能力等关键能力。

拟定计划：想要证明本题，关键在于找到对称中心，借助函数的中心对称公式$f(a-x)+f(a+x)=2b$，先猜对称中心后利用该公式证明。结合课堂所学可知函数中心对称具备多重性质，类比奇偶函数，本题可以从定义域入手，探索对称中心。要想函数中心对称，那么其定义域也需具备对称性，据此可以找到中心对称点。另外也可以从幂函数$b(x-1)^3$的图象出发，由此幂函数的对称性猜想$f(x)$的对称中心。

实施计划：

解法 1：定义域先行

根据上题求出的函数定义域$0<x<2$，利用定义域的对称性猜测对称中心为$(1,m)$，根据中心对称函数满足的公式，带入对称中心得：$f(1-x)+f(1+x)=\ln\frac{1-x}{1+x}+a(1-x)-bx^3+\ln\frac{1+x}{1-x}+a(1+x)+bx^3=a(1-x)+a(1+x)=2a$。因此，知晓曲线$y=f(x)$关于$(1,a)$对称，证明了函数的对称性。

解法 2：平移构造

从幂函数$b(x-1)^3$出发，由于$y=bx^3$关于(0,0)中心对称，进一步观察，联系已学内容可知$y=\ln\frac{1+x}{1-x}$与$y=ax$的对称中心为$(0,0)$，因此构造函数$g(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+ax+bx^3$，将函数$g(x)$向右平移一个单位可得$g(x-1)=\ln\frac{x}{2-x}+a(x-1)+b(x-1))^3$的对称中心为(1,0)。故函数$f(x)=g(1-x)+a$，其对称中心为$(1,a)$。

2.3 第（3）小题

理解题目：本问以不等式的解作为题目背景设置条件，形式复杂，本问考查了函数最值、单调性以及充要条件等知识，本质为函数的基础知识——给定a，求b的范围，侧重学生思维能力和解决问题能力素养的考察。

拟定计划：若直接采用直接求导解不等式的方法，存在两个参数题目难度着实不小。需要观察特殊性，结合前两小问的铺垫，利用端点效应发现-2 的特殊性，-2 为对称中心的纵坐标，从而求出a的值。获得题眼后，再去求导，讨论函数的单调性，从而求出b的范围，再证明“当且仅当”的充要性。

实施计划：

解法 1：含参讨论

由于函数具备对称中心且根据函数在连续性可知，$f(1)=-2$，则$a=-2$；$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}-2x+b(x-1)^3$，$0<x<2$；$f'(x)=\frac{2}{x(2-x)}-2+3b(x-1)^2=\frac{2x^2-4x+2}{x(2-x)}+3b(x-1)^2=\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}+3b(x-1)^2=(x-1)^2\left[\frac{2}{x(2-x)}+3b\right]$，$\frac{2}{x(2-x)}\geq 2$

① 当 $3b \geq -2$ 时，$f'(x) \geq 0$，$f(x)$单调递增，$f(x) > f(1) > -2$

② 当 $3b < -2$ 时，$\frac{2}{x(2-x)} + 3b = \frac{-3bx^2+6bx+2}{x(2-x)} = 0$，存在$x_1$，$x_2$两个实数根 st. $-3bx^2 + 6bx + 2=0$，满足$x_1 + x_2=2$，$x_1 \cdot x_2=\frac{2}{-3b}$，$x_1 < 1 < x_2 < 2$，所以 $f(x)$在$(1, x_2)$上递减，$f(x_2) < f(1) = -2$，不成立。

综上：$b \geq -\frac{2}{3}$

解法 2：端点效应

已知 $f(1) = -2$，要证 $f(x) = -2$，可进一步利用端点效应寻求必要条件。由$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} - 2 + 3b(x-1)^2$，得$f'(1) = 0$，不含参数 b，因此需要求三次导，可得$f'''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{(2-x)^3} + 6b$，$f'''(1) = 4 + 3b$,因为$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} + \frac{6}{(2-x)^4} \geq 0$，故必要条件$f'''(1) \geq 0$，$b \geq -\frac{2}{3}$。

① 当 $b \geq -\frac{2}{3}$时，$f'(x) = (x-1)^2\left[\frac{2}{x(2-x)} + 3b\right] \geq (x-1)^2\left[\frac{2}{x(2-x)} - 2\right] \geq 0$ 在 $1 < x < 2$ 很成立，所以在此区间单调递增，故 $f(x) > -2$

② 当 $b < -\frac{2}{3}$时，存在$x_0 \in (1,2)$使$f'(x_0) = 0$，故 $f(x)$在$(1, x_0)$上单调递减，在$(x_0, 2)$上单调递增，得 $f(x_0) < f(1) = -2$，与题意不符。

综上：实数 b 的取值范围为 $b \geq -\frac{2}{3}$

2.4 回顾反思

通过对题目的分析求解，可以发现三小问之间环环紧扣，通过两个参数的结合，多角度考察了学生灵活运用导数基础知识分析，解决函数的最值、单调性和不等式问题的能力。试题中函数形式简单，但对函数性质的通性通法考察十分全面，即考察了分类讨论以及化归与转化的思想，又考察了逻辑推理能力及运算求解能力。试题分层设问，由易入难，计算难度逐步增大，思想深度逐步提升，重点突出，对导数基本功的考察到位。

3 高考复习教学思考

2024 年新高考I卷第 18 题，聚焦函数、不等式与导数的主干内容，引导学生真正将导数作为函数研究的工具。试题关注数学本质，注重数学的基础性，引导学生对数学概念、方法有更深刻的认识。基于本题，笔者提出下列有关函数与导数复习的思考。

3.1 把握高考动态，回归数学基础

高考重视函数、导数综合应用等知识与方法的考察，而函数是高中数学课标中的四大主题之一，函数的学习在高中数学中的重要性不言而喻。作为题型改革后的第一届高考，对之后高考命题与人才选拔具备重要意义[4]。无论是教师还是学生都应该认真分析高考题目的意义，把握高考动态。本次将函数作为了压轴题，题目入口较宽，学生都能理解题目的意思，大致领悟解题办法，但 2,3 小问对学生的题目观察分析能力要求较高，需要学生仔细思考。

高考注重对能够普适性解决学科问题的本原性方法的考查，因此，一线教学将重心回归数学基础，把教材内容讲深讲透，注重作业题、练习题减量提质。依据教材内容适当挖深挖细，注重数学公式的积累，领悟其中的逻辑本质。如对于课本中必修一第 87 页习题 3.2 拓展第 13 题，就可以以该题为依托，厘清如何从奇偶函数推广到一般函数的对称性的。类似地，在三角函数中也可以从一般三角函数出发，探究如何推广到一般的周期性函数。

3.2 重视专题教学，注重深入理解

按参数不等式很成立求参数取值问题时高考的热点问题，本题的 1,3 两问均有涉及。在高考的多轮复习中，除了夯实基础知识外，教师还应该重视专题教学，更有针对性的带领

学生进行备考[5]。以学生的最近发展区为教学起点，设置逻辑关联的例题与变式，将一类方法讲通、讲透，譬如本题中涉及的求参问题、分类讨论等都可以成为高考复习中专题复习的主题，辅助学生进行深入理解。

在专题教学中，也可以带领学生体会一题多解的魅力[6]。例如，在恒成立问题的专题教学中尝试用最值法、参变分离法、端点效应法等不同的方法解决；在一题多解中，让学生体会不同方法的优劣，从而培养学生多思考并优化运算的能力与素养，真正将"多思少算"落实到课堂教学中。有了对问题、知识与方法的深度理解，学生解决问题能力的培养也会逐渐水到渠成。

3.3 推动自主探究，培养理性思维

波利亚说过中学数学教育的根本宗旨是：教会年轻人思考。在数学的学习与考核中，深度思考与分析是及其重要的。细观此次高考数学试卷，诸多题目若贸然直接求解，学生极易陷入繁杂运算的泥沼，甚至很难发现解题的康庄大道。就如本题第 3 问，直接求导面对两个参数可以说是难以进行。而分析题目，挖掘隐藏条件就成了关键。而这挖掘和翻译条件的能力就需要学生在日常生活中通过教师引导与自主探究结合。

高考注重学生思维的培养，在题设下层层推进，挖掘隐匿信息。在数学复习的教学中应当注重数学的连贯性，譬如在函数求导后，不少学生常常在求导之后，因苦思冥想仍找不到后续解题路径而心生怯意。老师应该给学生一定的例子，说明在什么情况下需要因式分解，什么情况下需要进一步求导。在特定的区间内的复杂问题，必要性探路、端点效应及分类讨论都是常用的方法，尽管常用，但学生往往不能了解合时应该用，在教学中，讲清"何时用"可能比"怎么用"更重要，这在学生理性思维的培养上有着重要作用。

参考文献

[1]尤娜，王佩，赵思林.2024 年全国新高考数学 Ⅰ 卷 19 题探析与启示[J].中学数学研究,2025,(1):23-25.

[2]刘依舒,徐守军..加强教考衔接 2024 年新高考Ⅰ卷第 18 题评析[J].中学数学研究(华南师范大学版),2025:53,1-4.

[3]陈灯云，陈涛.基于波利亚解题理论的高考数学试题分析[J].理科考试研究,2024,31(07):21-24..

[4]陆正海..从教到考再谈通性通法的教学[J].数学通报,2013:49-51,56.

[5]覃俊明.高中数学复习课项目式教学实践——以"导数的综合应用"教学为例[J].广西教育,2024,(32):47-51.

[6]袁守义.试卷讲评课上的"借题发挥"——提高高三数学试卷讲评复习功能的一点尝试[J].数学通报,2013,52(5):31-33,37.